Petre Năchilă

Cătălin Eugen Năchilă

LIBRIS We know books

Algebra pentru toți

Clasa a XI-a

Editura NOMINA

LIBRIS | We know books

Cuprins

Capitolul 1. PERMUTĂRI
1.1. Permutări 3
1.2. Inversiunile unei permutări 9

Capitolul 2. MATRICE
2.1. Mulțimi de matrice 15
2.2. Adunarea matricelor 20
2.3. Înmulțirea matricelor cu scalari 24
2.4. Produsul a două matrice 28
2.5. Ridicarea la putere a matricelor 36

Capitolul 3. DETERMINANȚI
3.1. Determinanți de ordinul 2 44
3.2. Determinanți de ordinul 3 50
3.3. Determinanți de ordinul *n* 57

Capitolul 4. SISTEME DE ECUAȚII LINIARE
4.1. Matrice inversabile 70
4.2. Ecuații matriceale 77
4.3. Rangul unei matrice 83
4.4. Sisteme de ecuații liniare. Regula lui Cramer 89
4.5. Rezolvarea sistemelor de ecuații liniare prin metoda lui Gauss 94
4.6. Teorema lui Rouché. Teorema Kronecker–Capelli 100

TESTE DE EVALUARE
Testul nr. 1 (Permutări) 106
Testul nr. 2 (Permutări) 106
Testul nr. 3 (Matrice) 107
Testul nr. 4 (Matrice) 107
Testul nr. 5 (Matrice) 108
Testul nr. 6 (Determinanți) 109
Testul nr. 7 (Determinanți) 110
Testul nr. 8 (Determinanți) 110
Testul nr. 9 (Determinanți) 111
Testul nr. 10 (Sisteme de ecuații liniare) 111
Testul nr. 11 (Sisteme de ecuații liniare) 112
Testul nr. 12 (Sisteme de ecuații liniare) 112
Testul nr. 13 (Sisteme de ecuații liniare) 113
Testul nr. 14 114

LIBRIS We know books

Capitolul 5. EXTINDERI

5.1. Matrice de ordinul doi 115
5.2. Matrice de ordinul $n \geq 3$ 126
5.3. Determinanți speciali 138

Capitolul 6. PROBLEME RECAPITULATIVE

6.1. Probleme de sinteză 145
6.2. Probleme pentru concursuri și olimpiade 157

SOLUȚII 163

LIBRIS We know books

Capitolul 1
PERMUTĂRI

1.1. Permutări

Definiție. Fie A mulțime nevidă finită. Orice funcție bijectivă $f: A \to A$ se numește *permutare* a mulțimii A.

Teoremă. Fie A mulțime finită cu n elemente ($n \in \mathbb{N}^*$). Atunci mulțimea $\{f: A \to A \mid f \text{ bijectivă}\}$ are $n!$ elemente.

Denumirea de permutare vine din limba latină: „permutare" – a muta unul față de altul, formula pentru P_n (numărul permutărilor de n elemente, $P_n = n!$) a fost dată de L. Gherșonide în 1321, iar termenul a fost propus de André Tacquet (1612 – 1660).

Observații: 1. Dacă A este mulțime finită nevidă și $f: A \to A$, atunci avem:

$$f \text{ bijectivă} \Leftrightarrow f \text{ injectivă} \Leftrightarrow f \text{ surjectivă}.$$

2. Deoarece compunerea a două funcții bijective este tot o funcție bijectivă, putem considera $A = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Orice funcție bijectivă $\sigma : A \to A$ se numește permutare (substituție) de n elemente (de gradul n).

Notații: $S_n = \{\sigma : A \to A \mid \sigma \text{ bijectivă}\}$. Avem card $S_n = n!$.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Permutările vor fi notate cu literele grecești σ, φ, θ, π, τ etc.

Observație: $\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)\} = A$.

Funcția identică $1_A : A \to A$ este permutare, numită permutarea identică și o notăm cu e. Avem $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}$.

Exemplu. S_3 are $3! = 6$ elemente. Avem:

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Dacă $\sigma, \tau \in S_n$, atunci $\sigma \circ \tau$ (notată și $\sigma\tau$) este tot permutare de gradul n numită compunerea (sau produsul) permutărilor σ și τ (în această ordine).

Dacă $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \ldots & \tau(n) \end{pmatrix}$, atunci avem:

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(\tau(1)) & \sigma(\tau(2)) & \ldots & \sigma(\tau(n)) \end{pmatrix}.$$

Notație: $\sigma^2 = \sigma\sigma$, $\sigma^3 = \sigma^2\sigma$, $\sigma^4 = \sigma^3\sigma$, $\ldots$, $\sigma^n = \sigma^{n-1}\sigma$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

Exemplu: Dacă $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, atunci avem:

LIBRIS We know books

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Observăm că în general înmulțirea (produsul) nu este comutativă (comutativ). Nu se poate efectua decât produsul a două permutări de același grad.

Proprietățile compunerii permutărilor

• Compunerea permutărilor este asociativă: $(\sigma \circ \tau) \circ \theta = \sigma \circ (\tau \circ \theta)$, $\forall\ \sigma, \tau, \theta \in S_n$.

• Permutarea identică de gradul n este element neutru pentru compunerea permutărilor (din S_n): $\sigma e = e\sigma = \sigma$, $\forall\ \sigma \in S_n$.

• Orice permutare are o inversă: $\forall\ \sigma \in S_n$, $\exists\ \sigma^{-1} \in S_n$, astfel încât $\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = e$.

Exemple: a) $e^{-1} = e$; b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Avem $\sigma^{-m} = (\sigma^{-1})^m$, $m \in \mathbb{N}^*$.

Definiție. Fie $i, j \in A = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $i \neq j$. Funcția $\tau_{ij} : A \to A$ (notată și (ij)) definită prin $\tau_{ij}(k) = \begin{cases} j, & k = i \\ i, & k = j \\ k, & k \neq i,\ k \neq j \end{cases}$ se numește *transpoziție*. Avem deci

$$\tau_{ij} = (ij) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & i-1 & i & i+1 & \ldots & j-1 & j & j+1 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & i-1 & j & i+1 & \ldots & j-1 & i & j+1 & \ldots & n \end{pmatrix}$$

Proprietățile transpozițiilor

1. $(ij) = (ji)$ **2.** $(ij)^{-1} = (ij)$ **3.** $(ij)^2 = e$

4. Numărul tuturor transpozițiilor de gradul n este $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$, $n \geq 2$.

Exemple: 1. Transpozițiile de gradul 3 sunt (1 2), (1 3), (2 3).

2. Transpozițiile de gradul 4 sunt (1 2), (1 3),(1 4), (2 3), (2 4), (3 4).

Probleme rezolvate

1. Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Determinați mulțimea $\{\sigma^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.

Soluție. $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

LIBRIS We know books

$$\sigma^3=\sigma^2\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix};$$

$$\sigma^4=\sigma^3\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}=e.$$

Prin inducție se demonstrează că $\sigma^{4k+r}=\sigma^r$ pentru orice $k\in\mathbb{N}$, $r\in\{0,1,2,3\}$. Deci $\{\sigma^n \mid n\in\mathbb{N}^*\}=\{e,\sigma,\sigma^2,\sigma^3\}$.

2. Demonstrați că pentru orice $\sigma\in S_n$ există $p\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $\sigma^p=e$.

Soluție. Dacă $n=1$ avem $S_1=\{e\}$ și luăm $p=1$. Dacă $n=2$, luăm $p=1$ dacă $\sigma=e$ și $p=2$ dacă $\sigma=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$. Fie $n\geq 3$ și $\sigma\in S_n$, $\sigma\neq e$ (dacă $\sigma=e$ luăm $p=1$). Atunci $\sigma^m\in S_n$ pentru orice $m\in\mathbb{N}^*$. Deoarece mulțimea S_n este finită (are $n!$ elemente), rezultă că există $m,t\in\mathbb{N}^*$, $m<t$ astfel încât $\sigma^m=\sigma^t$. Atunci $\sigma^{t-m}=\sigma^t\cdot(\sigma^{-1})^m=e$. Luăm deci $p=t-m$.

3. Determinați permutările $\sigma\in S_n$, $n\geq 3$, știind că numerele $1+\sigma(1)$, $2+\sigma(2)$, $3+\sigma(3)$, …, $n+\sigma(n)$ formează o progresie aritmetică.

Soluție. Pentru orice $k=\overline{2,n-1}$ avem $(k-1+\sigma(k-1))+(k+1+\sigma(k+1))=$ $=2(k+\sigma(k))$ și deci $\sigma(k-1)+\sigma(k+1)=2\sigma(k)$. Deci numerele $\sigma(1),\sigma(2),\ldots,\sigma(n)$ formează o progresie aritmetică.

Dacă rația este pozitivă, atunci $\sigma(1)<\sigma(2)<\ldots<\sigma(n)$ și atunci $\sigma(n)=n$. Într-adevăr, dacă $\sigma(n)\neq n$, există k, $1\leq k<n$ astfel încât $\sigma(n)=k$ și există t, $1\leq t<n$, astfel încât $\sigma(t)=n$. Atunci $\sigma(n)<\sigma(t)$, unde $t<n$ (contradicție). Analog se arată că $\sigma(i)=i$, $1\leq i<n-1$ și deci $\sigma=e$.

Dacă progresia este descrescătoare, adică $\sigma(1)>\sigma(2)>\ldots>\sigma(n)$, avem $\sigma(1)=n$, $\sigma(2)=n-1$, …, $\sigma(n)=1$ și deci $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&\ldots&n-1&n\\n&n-1&n-2&\ldots&2&1\end{pmatrix}$.

4. Fie $\sigma\in S_n$, $n\geq 3$. Știind că $\sigma\tau=\tau\sigma$ pentru orice $\tau\in S_n$, demonstrați că $\sigma=e$.

Soluție. Presupunem că $\sigma\neq e$. Atunci există $i\neq j$, $1\leq i\leq n$, $1\leq j\leq n$, astfel încât $\sigma(i)=$ $=j$. Cum $n\geq 3$, există $k=\overline{1,n}$, $k\neq i$, $k\neq j$. Fie permutarea τ astfel încât $\tau(m)=m$ pentru $m\neq i$, $m\neq j$; $\tau(m)=i$, dacă $m=j$; $\tau(m)=j$, dacă $m=i$. Avem $\sigma(\tau(i))=\tau(\sigma(i))\Leftrightarrow\sigma(j)=$ $=\sigma(i)\Leftrightarrow i=j$ (contradicție). Rezultă că $\sigma=\tau$.

5. Determinați permutarea $\sigma\in S_n$ pentru care $S(\sigma)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k}}{\sigma(k)}$ este:

a) minimă; b) maximă.

Soluție. Aplicăm inegalitatea Cauchy–Buniakovsky–Schwarz și avem:

$\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k}}{\sigma(k)}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\geq\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k}}{\sigma(k)}\cdot\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sigma(k)}\right)^2$. Deoarece $\sigma:\{1,2,\ldots,n\}\to\{1,$

LIBRIS We know books

2, …, $n\}$ este bijectivă, avem = 1 avem $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sigma(k)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$ și inegalitatea devine:

$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k}}{\sigma(k)}\geq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}$. Atunci $S(\sigma)$ devine minimă când în inegalitatea CBS avem $\frac{\sqrt{k}}{\sigma(k)}=\frac{1}{\sqrt{k}}\Leftrightarrow\sigma(k)=k,\ \forall\ k=\overline{1,n}\Leftrightarrow\sigma=e$. Atunci avem $S(\sigma)$ maximă pentru $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&\ldots&n-1&n\\ n&n-1&n-2&\ldots&2&1\end{pmatrix}$.

6. Determinați permutările x pentru care $\sigma x=x\sigma$, $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\ 2&3&1&5&4\end{pmatrix}$.

Soluție. $x=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\ a&b&c&d&e\end{pmatrix}$, unde $\{a, b, c, d, e\}=\{1, 2, 3, 4, 5\}$,

$x\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\ b&c&a&d&e\end{pmatrix}$, $\sigma x=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\ \sigma(a)&\sigma(b)&\sigma(c)&\sigma(d)&\sigma(e)\end{pmatrix}$.

Pentru $a=1\Rightarrow x_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\ 1&2&3&4&5\end{pmatrix}$, $x_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\ 1&2&3&5&4\end{pmatrix}$.

Pentru $a=2\Rightarrow x_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\ 2&3&1&4&5\end{pmatrix}$, $x_4=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\ 2&3&1&5&4\end{pmatrix}$.

Pentru $a=3\Rightarrow x_5=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\ 3&1&2&4&5\end{pmatrix}$, $x_6=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\ 3&1&2&5&4\end{pmatrix}$.

Probleme propuse

1. Fie permutările $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\ 3&1&2&5&4\end{pmatrix}$, $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\ 2&1&3&4&5\end{pmatrix}$.

a) Determinați $\sigma\tau$ și $\tau\sigma$.

b) Determinați $m, n\in\mathbb{N}^*$ minime pentru care $\sigma^m=\tau^n=e$.

2. Determinați toate transpozițiile de gradul 5.

3. Rezolvați în S_4 ecuațiile:

a) $\sigma^2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\ 3&4&1&2\end{pmatrix}$; b) $\sigma^3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\ 3&1&4&2\end{pmatrix}$.

4. Determinați permutările $\sigma\in S_n$, $n\geq3$, știind că numerele $1+\sigma(1)$, $2+\sigma(2)$, …, $n+\sigma(n)$ formează o progresie geometrică.

LIBRIS we know books

5. Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$. Determinați $\sigma \in S_n$ în cazurile:

a) $1 + \sigma(1) = 2 + \sigma(2) = \ldots = n + \sigma(n)$;

b) $\sigma(1) - 1 = \sigma(2) - 2 = \ldots = \sigma(n) - n$;

c) $\sigma(1) \cdot 1 = \sigma(2) \cdot 2 = \ldots = n\sigma(n)$.

6. Rezolvați în S_5 ecuațiile:

a) $\sigma^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, unde $n \in \{3, 4, 5\}$;

b) $\sigma\tau = \tau\sigma$, unde $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

7. Fie numerele reale strict pozitive $a_1 < a_2 < a_3$. Determinați (în fiecare caz) permutarea $\sigma \in S_3$ pentru care:

a) suma $S_\sigma = \sum_{i=1}^{3} a_i a_{\sigma(i)}$ este maximă, respectiv minimă;

b) suma $S_\sigma = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{a_i a_{\sigma(i)}}$ este maximă, respectiv minimă.

c) suma $S_\sigma = \sum_{i=1}^{3} (a_i - a_{\sigma(i)})^2$ este maximă, respectiv minimă.

8. Determinați σ^{100}, σ^{201}, σ^{302}, unde:

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

9. Determinați σ pentru care:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \sigma \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \sigma \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

10. Fie $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4} = 4123$. Determinați suma $\sum_{\sigma \in S_4} \overline{a_{\sigma(1)} a_{\sigma(2)} a_{\sigma(3)} a_{\sigma(4)}}$.

11. Se consideră numerele $x = 4675$, $y = 24365$.

a) Câte numere distincte se obțin permutând cifrele numerelor x și y?

b) Al câtelea număr este în ordine crescătoare (respectiv descrescătoare) fiecare din numerele x și y când se efectuează toate permutările posibile ale cifrelor celor două numere?

12. Se consideră numerele $x = 4225$ și $y = 43556$.

a) Câte numere distincte se obțin permutând toate cifrele numerelor x și y?

b) Calculați în fiecare caz în parte suma tuturor numerelor obținute.

LIBRIS We know books

13. Se consideră numerele $0 < x_1 < x_2 < x_3$. Determinați permutarea $\sigma \in S_3$ pentru care suma:

a) $S_\sigma = \sum_{i=1}^{3} \frac{x_i}{x_{\sigma(i)}}$ este maximă; b) $S_\sigma = \sum_{i=1}^{3} \frac{x_i}{x_{\sigma(i)}}$ este minimă;

c) $S_\sigma = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{x_i x_{\sigma(i)}}$ este maximă; d) $S_\sigma = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{x_i x_{\sigma(i)}}$ este minimă;

e) $S_\sigma = \sum_{i=1}^{3} \left(x_i - x_{\sigma(i)}\right)^3$ este maximă; b) $S_\sigma = \sum_{i=1}^{3} \left(x_i - x_{\sigma(i)}\right)^3$ este minimă.

14. Se consideră numerele $0 < x_1 < x_2 < x_3$. Determinați permutarea $\sigma \in S_3$ pentru care avem $x_1 x_{\sigma(1)} < x_2 x_{\sigma(2)} < x_3 x_{\sigma(3)}$.

15. Demonstrați că pentru orice permutare $\sigma \in S_3$ avem $\sum_{i=1}^{3} \frac{\sigma(i)}{i^2} \geq \frac{11}{6}$.

16. Fie numerele x_1, x_2, x_3 din intervalul $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$. Demonstrați că pentru orice $\sigma \in S_3$ avem: $\left(x_1 + \frac{1}{x_{\sigma(1)}}\right)\left(x_2 + \frac{1}{x_{\sigma(2)}}\right)\left(x_3 + \frac{1}{x_{\sigma(3)}}\right) < \frac{125}{8}$.

17. Fie $H \subset S_n$, $H \neq \varnothing$, cu proprietatea că oricare ar fi $\sigma, \theta \in \mathbb{N}$, avem $\sigma\theta \in H$. Demonstrați că:

a) $e \in H$; b) dacă $\sigma \in H$, atunci $\sigma^{-1} \in H$.

18. Determinați două permutări $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ a & b & c & d & e \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ m & n & p & x & y \end{pmatrix}$, dacă $\{a, b, c, d, e\} = \{m, n, p, x, y\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\{d, e\} = \{x, y\} = \{4, 5\}$, iar $\sigma\tau = \tau\sigma$.

1.2. Inversiunile unei permutări

Definiție. Se numește *inversiune* a permutării $\sigma \in S_n$, $n \geq 2$, o pereche (ij) cu proprietățile $1 \leq i < j \leq n$ și $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Observații:

1. Perechea (i, j) este inversiune a permutării $\sigma \Leftrightarrow \dfrac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j} < 0$.

2. Numărul inversiunilor permutării σ se notează cu $\mathrm{Inv}(\sigma)$ (sau cu $m(\sigma)$. Avem atunci $m(e) = 0$ și $m(\sigma) \in \mathbb{N}^*$ pentru orice $\sigma \neq e$.

3. Numărul maxim de inversiuni este $\dfrac{n(n-1)}{2}$ și se obține pentru permutarea:

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$, adică pentru permutarea σ definită prin:

$\sigma(k) = n - k + 1,\ k = \overline{1,n}$.

Definiție. Permutarea σ se numește *permutare pară* (*impară*) dacă $m(\sigma)$este număr par (respectiv impar).

Definiție. Numărul $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{m(\sigma)}$ se numește *signatura* permutării σ.

Observații:

1. Pentru orice $\sigma \in S_n$ avem $\varepsilon(\sigma) = 1$ sau $\varepsilon(\sigma) = -1$.

2. Permutarea σ este permutare pară $\Leftrightarrow \varepsilon(\sigma) = 1$.

Permutarea σ este permutare impară $\Leftrightarrow \varepsilon(\sigma) = -1$.

Teoremă. Orice transpoziție este permutare impară.

Demonstrație. Fie transpoziția (ij) cu $1 \leq i < j \leq n$. Dacă $k < i$ avem $\tau_{ij}(k) = k < j = \tau_{ij}(i)$ și deci (k, i) nu este inversiune. Analog perechea (j, k) cu $j < k$ nu este inversiune. Fie $i < k < j$. Deoarece $\tau_{ij}(i) = j > k = \tau_{ij}(k)$, rezultă că perechile (i, j) și (k, j) sunt inversiuni. Deoarece și (i, j) este inversiune, rezultă că $m(\tau_{ij}) = 2(j - i - 1) + 1 = 2(j - i) - 1$ și atunci $m(\tau_{ij}) = -1$.

Teoremă. Dacă $\sigma \in S_n$, atunci $\varepsilon(\sigma) = \prod\limits_{1\leq i<j\leq n} \dfrac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}$.

Demonstrație. Produsul definit în teoremă conține C_n^2 factori. Fie factorul $\dfrac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}$, unde $1 \leq i < j \leq n$. Fie $\sigma(i) = k$, $\sigma(j) = p$. Avem evident $k \neq p$ și atunci

$\sigma(i) - \sigma(j) = k - p \neq 0$. Numărul $k - p$ apare în factorul $\dfrac{\sigma(k)-\sigma(p)}{k-p}$ dacă $k < p$ sau în factorul $\dfrac{\sigma(p)-\sigma(k)}{p-k}$ dacă $p < k$, după cum (i, j) este inversiune sau nu este inversiune.

Prin simplificare obținem -1 de un număr de ori egal cu numărul de inversiuni ale permutării σ. Deci produsul este $\varepsilon(\sigma)$.

LIBRIS We know books

Teoremă. Pentru orice $\sigma, \tau \in S_n$ avem $\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$ (signatura produsului a două permutări este egală cu produsul signaturilor celor două permutări).

Demonstrație. $\varepsilon(\sigma\tau) = \prod_{1\le i<j\le n} \frac{\sigma(\tau(i)) - \sigma(\tau(j))}{i-j} = \prod_{1\le i<j\le n} \left(\frac{\sigma(\tau(i)) - \sigma(\tau(j))}{\tau(i) - \tau(j)} \cdot \frac{\tau(i) - \tau(j)}{i-j} \right) =$

$$= \left(\prod_{1\le i<j\le n} \frac{\sigma(\tau(i)) - \sigma(\tau(j))}{\tau(i) - \tau(j)} \right) \cdot \left(\prod_{1\le i<j\le n} \frac{\tau(i) - \tau(j)}{i-j} \right) = \varepsilon(\sigma) \cdot \varepsilon(\tau).$$

Consecință. Fie $\varepsilon, \tau \in S_n$. Atunci avem:

a) $\sigma\tau$ este permutare pară $\Leftrightarrow$ σ și τ sunt ambele pare sau ambele impare;

b) $\sigma\tau$ este permutare impară $\Leftrightarrow$ σ și τ sunt de parități diferite.

Teoremă. Orice permutare din S_n, $n \ge 2$, este un produs de transpoziții.

Consecință. Orice permutare pară (respectiv impară) este produsul unui număr par (respectiv impar) de transpoziții.

Observație. Numărul permutărilor pare, respectiv impare, din S_n, $n \ge 2$, este $\frac{n!}{2}$.

Probleme rezolvate

1. Determinați signatura permutării $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Soluție. În cele ce urmează se consideră numerele de pe linia a doua. Înaintea numărului 1 se află numerele 4 și 3. Avem deci două inversiuni: (1, 3) și (2, 3) (s-au luat numerele corespunzătoare de pe prima linie). Tăind numărul de pe linia a doua, mai rămân numerele 4, 3, 5, 2. Luând numărul 2, înaintea lui se află numerele 4, 3, 5. Avem deci inversiunile (1, 5), (2, 5), (4, 5). Analog se determină inversiunea (1, 2). Rezultă că $m(\varepsilon) = 6$, $\varepsilon(\sigma) = 1$.

2. Rezolvați ecuația $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

Soluție. Fie $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$. Deoarece $m(\tau) = 7$, rezultă că τ este permutare impară. Deoarece σ^2 este permutare pară ($\varepsilon(\sigma^2) = \varepsilon(\sigma) \cdot \varepsilon(\sigma) = 1$), rezultă că ecuația $\sigma^2 = \tau$ nu are soluție.

3. Scrieți permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ ca produs de transpoziții.

Soluție. Considerăm transpoziția $(1\ 5) = \tau_1$. Fie $\sigma_1 = \tau_1\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Considerăm transpoziția (1 4) = τ_2. Fie $\sigma_2 = \tau_2\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Considerăm transpoziția (1 2) = τ_3. Fie $\sigma_3 = \tau_3\sigma_2 = e$. Rezultă că $\tau_3\tau_2\tau_1\sigma = e$ și deci $\sigma = \tau_1^{-1}\tau_2^{-1}\tau_3^{-1} =$ = (1 5)(1 4)(1 2).

4. Fie $\sigma \in S_{2n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ 1 & 3 & 5 & \dots & 2n-1 & 2 & 4 & \dots & 2n \end{pmatrix}$.

a) Determinați numărul inversiunilor permutării σ.

b) Determinați n, știind că σ este permutare pară.

Soluție. a) Numerele 1, 3, 5, …, $2n - 1$ sunt scrise în ordine crescătoare (pe a doua linie). În fața numerelor 2, 4, 6, …, $2n - 2$ sunt scrise $n - 1$, $n - 2$, $n - 3$, …, respectiv 1 număr mai mare. Deci $m(\sigma) = (n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$.

b) Avem $m(\sigma)$ număr par $\Leftrightarrow n = 4k$, $k \in \mathbb{N}^*$ sau $n = 4k + 1$, $k \in \mathbb{N}$.

5. Determinați permutarea $\sigma \in S_n$ cu cel mai mare număr de inversiuni și studiați paritatea acesteia pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.

Soluție. σ are un număr maxim de inversiuni dacă și numai dacă (1, 2), (1, 3), …, (1, n), (2, 3), …, (2, n), …, ($n - 1$, n) sunt inversiuni. Obținem $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$ și $m(\sigma) = \frac{n(n-1)}{2} = C_n^2$. Permutarea σ este pară pentru $n = 4k$ sau $n = 4k + 1$ și este impară pentru $n = 4k + 2$ sau $n = 4k + 3$.

6. Determinați numărul inversiunilor $\sigma \in S_n$, $n \geq 2$, unde:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n & n+1 & n+2 & n+3 & \dots & 2n \\ 2 & 4 & 6 & 8 & \dots & 2n & 1 & 3 & 5 & \dots & 2n-1 \end{pmatrix}.$$

Soluție. $\sigma(k) = \begin{cases} 2k, & k = \overline{1,n} \\ 2(k-n)-1, & k = \overline{n+1, 2n} \end{cases}$. Dacă $1 \leq i < j \leq n$ sau $n + 1 \leq i < j \leq 2n$, avem $\sigma(i) < \sigma(j)$ și deci (i, j) nu este inversiune. Pentru ca (i, j) să fie inversiune, trebuie să avem $1 \leq i \leq n < j \leq 2n$ și $\sigma(i) > \sigma(j)$. Deci $2i > 2(j - n) - 1 \Leftrightarrow 2(j - i) < 2n + 1$, de unde rezultă $j - i \leq n$. Dacă notăm $j = n + k$, înseamnă că perechile $(i, n + k)$ sunt inversiuni, pentru $i = \overline{1,n}$, $k = \overline{1,n}$, și $m(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

7. Fie $\sigma, \tau \in S_n$. Demonstrați că $\sigma = \tau$ dacă are loc una din relațiile:

a) $\frac{\sigma(1)}{\tau(1)} = \frac{\sigma(2)}{\tau(2)} = \ldots = \frac{\sigma(n)}{\tau(n)}$; b) $\frac{\sigma(1)+\tau(1)}{1} = \frac{\sigma(2)+\tau(2)}{2} = \ldots = \frac{\sigma(n)+\tau(n)}{n}$.

b) Determinați n, știind că σ este permutare pară.

LIBRIS We know books

Soluție. a) $\frac{\sigma(1)}{\tau(1)} = \frac{\sigma(2)}{\tau(2)} = \ldots = \frac{\sigma(n)}{\tau(n)} = \frac{1+2+\ldots+n}{1+2+\ldots+n} = 1 \Rightarrow \frac{\sigma(k)}{\tau(k)} = 1, \forall\, k = \overline{1,n} \Rightarrow \sigma(k) =$ $= \tau(k), \forall\, k = \overline{1,n} \Rightarrow \sigma = \tau$.

b) Avem $\frac{\sigma(k)+\tau(k)}{k} = \frac{\sum_{k=1}^{n}(\sigma(k)+\tau(k))}{\sum_{k=1}^{n} k} = \frac{2\cdot\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{n(n+1)}{2}} = 2$. Avem $\sigma(1) + \tau(1) = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sigma(1) = \tau(1) = 1$; $\sigma(2) + \tau(2) = 4 \Rightarrow \sigma(2) = \tau(2)$ etc.

Probleme propuse

1. Determinați signatura permutărilor:

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & i & 1 & 6 & j & 5 \end{pmatrix}$.

2. Scrieți ca produs de transpoziții următoarele permutări:

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Rezolvați ecuația $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

4. Determinați permutările $\sigma \in S_n$ pentru care $m(\sigma) = 3$.

5. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ număr impar. Demonstrați că pentru orice $\sigma \in S_n$ există $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ astfel încât $k + \sigma(k)$ să fie număr par.

6. Fie $\sigma \in S_{2n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n & n+1 & n+2 & \ldots & 2n-1 & 2n \\ 2 & 4 & 6 & \ldots & 2n & 1 & 3 & \ldots & 2n-3 & 2n-1 \end{pmatrix}$.

a) Determinați $m(\sigma)$.

b) Determinați n, știind că σ este permutare impară.

7. Determinați $n \in \mathbb{N}^*$, știind că $\sigma \in S_{2n}$ este permutare pară:

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n & n+1 & n+2 & \ldots & 2n-1 & 2n \\ 2n-1 & 2n-3 & 2n-5 & \ldots & 1 & 2n & 2n-2 & \ldots & 4 & 2 \end{pmatrix}$;

b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n & n+1 & n+2 & \ldots & 2n-1 & 2n \\ 2n & 2n-2 & 2n-4 & \ldots & 2 & 2n-1 & 2n-3 & \ldots & 3 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & 2n-1 & 2n \\ 2n-1 & 2n & 2n-3 & 2n-2 & \ldots & 1 & 2 \end{pmatrix}$.